ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ CẨM VÂN

NGUYÊN LÝ IĐÊAN NGUYÊN TỐ TRONG ĐẠI SỐ GIAO HOÁN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ CẨM VÂN

NGUYÊN LÝ IĐÊAN NGUYÊN TỐ TRONG ĐẠI SỐ GIAO HOÁN

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 60 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. ĐOÀN TRUNG CƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 14 tháng 06 năm 2016

Người viết luận văn

Trần Thị Cẩm Vân

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành, sâu sắc tới TS. Đoàn Trung Cường (Viện Toán học Việt Nam), thầy là người trực tiếp hướng dẫn, tận tình chỉ bảo, giúp đỡ và động viên tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng sau Đại học, quý thầy cô trong khoa Toán, các bạn học viên lớp cao học Toán k21b và k22 đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Qua đây, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới người thân trong gia đình, bạn bè đã luôn động viên khích lệ tôi trong suốt quá trình hoàn thành khóa học

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 14 tháng 06 năm 2016

Người viết luận văn

Trần Thị Cẩm Vân

Mục lục

Mở đầu

Trong đại số giao hoán, về sự tồn tại iđêan nguyên tố có một số kết quả cơ bản thường gặp trong quá trình học đại số giáo hoán. Ví dụ.

Định lý Cohen: *Tồn tại iđêan nguyên tố trong vành giao hoán.*

Định lý $[Ka_2, p.1]$.*Cho S là tập đóng nhân trong vành giao hoán R, I là tập các iđêan không giao với S. Khi đó iđêan cực đại trong I luôn là nguyên tố.*

Ngoài ra có các kết quả khác của Herstein, Isaacs...

Mặc dù rất quan trọng nhưng các kết quả này xuất hiện một cách rời rạc không hệ thống. Đó là lí do các tác giả Lam và Reyes tiến hành nghiên cứu một cách hệ thống các nguyên lý iđêan nguyên tố trong bài báo " A prime ideal in commutative algebra ", J.Algebra 319, (2008), 3006-3027. Mục đích của luận văn này là trình bày lại bài báo.

Luận văn gồm 2 chương .

Chương 1 được dành để trình bày các kiến thức cho Chương 2. Cụ thể hơn, chúng tôi trình bày các đặc trưng của iđêan nguyên tố, các kết quả liên quan đến sự tồn tại iđêan nguyên tố của Cohen, Herstein, Isaacs. Phần cuối của chương được dành để nhắc lại một vài kiến thức cơ sở về phạm trù.

Nội dung chính của luận văn này trong Chương 2, nguyên lý iđêan nguyên tố. Cụ thể, đầu tiên chúng tôi trình bày họ iđêan và nguyên lý iđêan nguyên tố. Tiếp theo dựa và đó chúng tôi nêu ứng dụng nguyên lý iđêan nguyên tố trong iđêan linh hóa tử điểm, iđêan cốt yếu và iđêan khả nghịch. Cuối chương là phạm trù môđun xyclic.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong toàn bộ luận văn, ta luôn xét R là vành giao hoán có đơn vị.

Ở chương này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức về iđêan nguyên tố trong vành giao hoán.

1.1 Iđêan nguyên tố và iđêan cực đại

Trong tiết này chúng tôi sẽ nhắc lại định nghĩa và một số đặc trưng của iđêan nguyên tố và iđêan cực đại.

1.1.1 Mối quan hệ giữa iđêan nguyên tố và iđêan cực đại

Định nghĩa 1.1.1. Cho R là vành giao hoán và I là iđêan, $I \subseteq R$và $I \neq R$. Khi đó I là iđêan nguyên tố nếu $xy \in I$ thì $x \in I$ hoặc $y \in I$ với mọi $x, y \in R$.Tập các iđêan nguyên tố được kí hiệu là $Spec(R)$ được gọi là phổ iđêan nguyên tố của vành R.

Ví dụ 1.1.2. 1. Trong $\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}$ là iđêan nguyên tố khi và chỉ khi $n = 0$ hoặc n là số nguyên tố.

2. 0 là i đêan nguyên tố của vành $\mathbb{Z}$.

Định lý 1.1.3. ***(Định lý đặc trưng)*** *Cho I là một iđêan của vành R. Khi đó I là iđêan nguyên tố khi và chỉ khi R/I là miền nguyên.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử I là iđêan nguyên tố của R. Khi đó, $R/I = \{x + I \mid x \in R\}$ là vành thương của R trên I. Vì I là iđêan nguyên tố nên $I \neq R$ và R/I có nhiều hơn một phần tử. Phần tử đơn vị của R/I là $1 + I$. Do R/I là vành giao hoán nên R/I là vành giao hoán. Giả sử $x + I, y + I \in R/I$ mà $(x + I)(y + I) = 0 + I$, do đó $xy + I = 0 + I$, khi đó $xy \in I$. Do I nguyên tố nên $x \in I$ hoặc $y \in I$. Suy ra $x + I = I$ hoặc $y + I = I$. Vì vậy R/I là vành giao hoán không có ước của 0 hay R/I là miền nguyên.

($\Leftarrow$) Giả sử R/I là miền nguyên, khi đó R/I có nhiều hơn một phần tử suy ra $R \neq I$. Giả sử $x, y \in R$ và $xy \in I$ suy ra $xy + I = I$ hay $(x + I)(y + I) = I = 0 + I$. Vì R/I không có ước của 0 nên $x + I = I$ hoặc $y + I = I$, do đó $x \in I$ hoặc $y \in I$. Vậy I là iđêan nguyên tố. □

Định nghĩa 1.1.4. Cho R là một vành giao hoán, I là iđêan, $I \subseteq R, I \neq R$. Khi đó, I là iđêan cực đại của vành R nếu tồn tại iđêan J và $I \subsetneqq J$ thì $J = R$.

Ví dụ 1.1.5. Vành $\mathbb{Z}_6$ có hai iđêan cực đại là $2\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ và $3\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

Định lý 1.1.6. *(**Định lý đặc trưng**) Cho I là một iđêan của vành R. Khi đó, I là iđêan cực đại khi và chỉ khi R/I là một trường.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) Giả sử R/I là một trường, do đó R/I có nhiều hơn một phần tử vì vậy $R \neq I$. Giả sử, J là một iđêan của R và $J \supsetneqq I$, khi đó tồn tại $x_0 \in J/I$. Xét $x_0 + I \in R/I$, vì $x_0 \notin I$ nên $x_0 + I$ khả nghịch tức là tồn tại $x_0' + I$ sao cho $(x_0' + I)(x_0 + I) = x_0'x_0 + I = 1 + I$ hay $1 = x_0'x_0 + y$ với $y \in I$ mà $x_0 \in I$ nên $1 \in I \subseteq J$. Do đó, $1 \in J$, suy ra $J = R$. Vậy I là iđêan cực đại.

($\Leftarrow$) Giả sử I là iđêan cực đại của R suy ra $R \neq I$. Do đó, $R/I \neq 0$. Vì R là vành giao hoán có đơn vị nên R/I cũng là vành giao hoán và có đơn vị là $1 + I$.

Giả sử, $x + I \in R/I$ và $x + I \neq I$ suy ra $x \notin I$. Xét iđêan J của R mà $J = I + xR$ suy ra $I \subseteq J$ và $x \in J$. Do I là cực đại nên $1_R = y + xx_1 \in J$

suy ra $1 + I = (y + xx_1) + I = xx_1 + y + I = (x + I)(x_1 + I)$. Suy ra $x + I$ khả nghịch. Vậy R/I là một trường. $\square$

Định lý 1.1.7. *Trong một vành giao hoán R, mọi iđêan cực đại đều là iđêan nguyên tố.*

Chứng minh. Giả sử I là iđêan cực đại của R. Với mọi $a, b \in R$, giả sử $ab \in I$ và $a \notin I$. Khi đó $I + (a)$ cũng là một iđêan của R và $I \subsetneq I + (a)$. Vì I là cực đại nên $I + (a) = R$. Khi đó, tồn tai các phần tử $u \in I, v \in R$ sao cho $1 = u + va$ suy r$b = bu + v(ba) \in I$. Vậy I là iđêan nguyên tố. $\square$

Điều ngược lại không đúng.

Ví dụ 1.1.8. Trong vành $\mathbb{Z}$, iđêan $\{0\}$ là iđêan nguyên tố nhưng không phải iđêan cực đại vì $2\mathbb{Z}$ là iđêan của $\mathbb{Z}$ và $\{0\} \subseteq 2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$.

Định nghĩa 1.1.9. Cho $\mathcal{F}$ là họ các iđêan của R với $R \in \mathcal{F}$. Khi đó:
i) $\mathcal{F}'$ là phần bù của $\mathcal{F}$ (gồm tất cả các iđêan của $R \notin \mathcal{F}$) và $\mathrm{Max}(\mathcal{F}')$ là tập các phần tử cực đại của $\mathcal{F}'$.
ii) $\mathcal{F}'$ là họ MP (cực đại nên nguyên tố) nếu $\mathrm{Max}(\mathcal{F}') \subseteq \mathrm{Spec}(R)$

1.1.2 Sự tồn tại iđêan nguyên tố

Các kết quả về sự tồn tại iđêan nguyên tố trong vành giao hoán đều là kết quả quan trọng và cơ bản trong Đại số giao hoán. Trong phần này chúng tôi trình bày lại một số kết quả quan trọng trong số đó.

Định lý 1.1.10. *Trong một vành giao hoán iđêan nguyên tố luôn tồn tại.*

Định lý 1.1.11. *(**Định lý Cohen.**) Cho S là tập đóng nhân. Luôn tồn tại iđêan nguyên tố sao cho $P \cap S \neq \varnothing$*

Định lý 1.1.12. *(**Định lý Herstein.**) Cho $R-$ môđun M khác 0. Giả sử I là iđêan tối đại trong các iđêan có dạng $\mathrm{Ann}(x)$ với $x \neq 0 \in M$. Khi đó I là nguyên tố.*

Định lý 1.1.13. *(**Định lý Isaacs.**) Giả sử I là iđêan cực đại trong các iđêan không chính của vành R. Khi đó I là nguyên tố.*

1.2 Phạm trù

Lý thuyết phạm trù ra đời vào khoảng năm 1945. Có rất nhiều cách để định nghĩa một phạm trù. Định nghĩa mà ta đưa ra sau đây nhằm thích hợp cho những loại phạm trù quen biết như phạm trù các nhóm, các nhóm Abel và đặc biệt là các phạm trù môđun, loại phạm trù sau cùng này chính là động lực cho sự phát triển của lý thuyết phạm trù

Định nghĩa 1.2.1. Một phạm trù K được cho bởi:
(K_1) Một lớp các vật $Ob(K)$ mà mỗi phần tử của $Ob(K)$ được gọi là một vật của phạm trù K.)
(K_2) Hai vật A, B tùy ý của $Ob(K)$ luôn xác định một tập hợp $Mor_K(A, B)$ gọi là tập hợp các cấu xạ từ vật A đến vật B sao cho với hai cặp khác nhau của các vật $(A, B) \neq (C, D)$ thì:

$$Mor_K(A, B) \cap Mor_K(C, D) = \oslash$$

(K_3) Với mỗi bộ ba (A, B, C) tùy ý các vật của $Ob(K)$ luôn có một ánh xạ

$$Mor_K(B, C) \times Mor_K(A, B) \ni (a, b) \to ba \in Mor_K(A, C).$$

gọi là phép nhân , sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

- Tính chất kết hợp: Với mọi $a \in Mor_K(A, B), b \in Mor_K(B, C), c \in Mor_K(C, D)$ thì $(ab)c = a(bc)$.
- Có đồng nhất: Với mỗi vật $A \in Ob(K)$ tùy ý luôn tồn tại một cấu xạ $1_A \in Mor_K(A, A)$ gọi là phần tử đồng nhất sao cho $a1_A = 1_Ba = a$, với mọi $a \in Mor_K(A, B)$.

Khi phạm trù K đã xác định trước thì để cho tiện ta viết $Mor(A, B)$ thay cho $Mor_K(A, B)$ và kí hiệu $Mor(K) = \cup_A, B \in Ob(K) Mor(A, B)$. Ngoài ra ta cũng viết $A \in K$ thay cho $A \in Ob(K)$,

Định nghĩa 1.2.2. Cho K là một phạm trù và $G \subseteq K$, G được gọi là phạm trù con của phạm trù K nếu G là phạm trù.